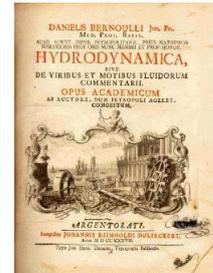
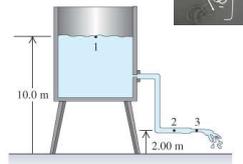
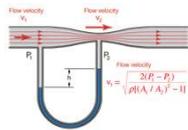


MECÂNICA DE FLUIDOS

Cap. 4

3.2 Relações integrais aplicadas ao volume de controlo (continuação)

- Equação da energia/Bernoulli;



Daniel Bernoulli (1700 - 1782)

Bibliografia:

- Quintela, A. 2000. *Hidráulica*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa;
- Bastos, F. 1983. *Problemas de mecânica de fluidos*. Gaunabara, Rio de Janeiro;
- Oliveira, L.; Lopes, A. 2007. *Mecânica dos fluidos*. ETEP, Lisboa, 2ª edição

1/25

Equação de Bernoulli / Líquidos perfeitos em regime permanente

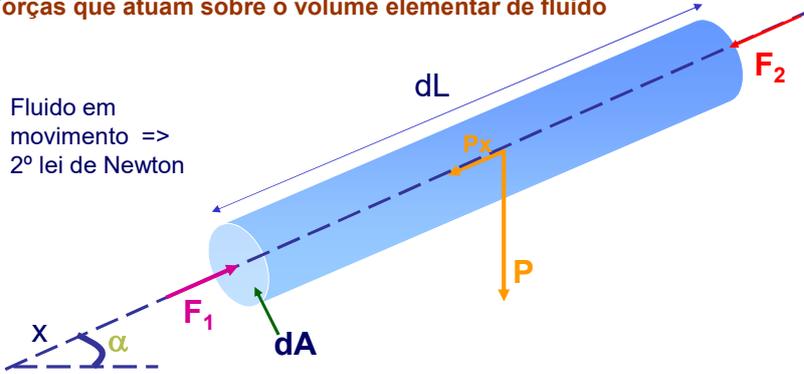
- Dedução da equação e condições de aplicação;
- Interpretação energética do teorema (Altura cinética, Carga total);
- Linha piezométrica e Linha de energia;
- Variação da cota piezométrica segundo as linhas de corrente;
- Aplicações da equação de Bernoulli.

□ Equação de Bernoulli para líquidos perfeitos em regime permanente

- Incompressíveis e sem viscosidade
- Velocidade invariável no tempo

Consideremos um filamento de corrente arbitrário pertencente a um tubo de fluxo

Forças que atuam sobre o volume elementar de fluido



$$\sum \vec{F} = m a \Leftrightarrow \sum F_x = m a \Leftrightarrow F_1 - F_2 - P_x = m a$$

Cálculos auxiliares:

$$* p_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial L} dL$$

$$* F_1 = p_1 A_1 \quad * F_2 = p_2 A_2$$

$$* P = \gamma V = dA dL \gamma \quad * P_x = P \text{ sen } \alpha \quad * m = dA dL \frac{\gamma}{g}$$

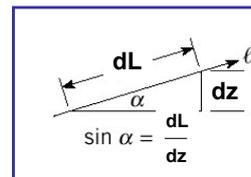
$$p_1 dA - p_2 dA - dA dL \gamma \text{ sen } \alpha = \frac{\gamma}{g} dA dL a$$

$$p_1 dA - \left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial L} dL \right) dA - dA dL \gamma \text{ sen } \alpha = \frac{\gamma}{g} dA dL a$$

~~$$p_1 dA - p_1 dA - \frac{\partial p}{\partial L} dL dA - dA dL \gamma \text{ sen } \alpha = \frac{\gamma}{g} dA dL a$$~~

$$- \frac{\partial p}{\partial L} dL dA - dA dL \gamma \text{ sen } \alpha = \frac{\gamma}{g} dA dL a$$

$$- \frac{\partial p}{\partial L} dA dL - dA \frac{\partial z}{\partial L} dL \gamma = \frac{\gamma}{g} dA dL a$$



Dividindo todos os termos por $dA \, dL$ obtêm-se $-\frac{\partial p}{\partial L} - \frac{\partial Z}{\partial L} \gamma = \frac{\gamma}{g} a$

Dividindo todos os termos por γ obtêm-se $-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial L} - \frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{1}{g} a$

Multiplicando todos os termos por -1, obtêm-se: $\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial L} + \frac{\partial Z}{\partial L} + \frac{1}{g} a = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial L} + \frac{1}{g} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$$

Sabemos da cinemática que: $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial L} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial L} + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2g} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial L} \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\mathbf{u}^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

Em regime permanente $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$

para líquidos perfeitos e em regime permanente a energia mecânica total por unidade de peso do líquido é constante ao longo de um filamento ou de uma linha de corrente

$$\frac{\partial}{\partial L} \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\mathbf{u}^2}{2g} \right) = 0$$

H

Energia mecânica total do fluido

Equação de Bernoulli para líquidos perfeitos

Daniel Bernoulli (1700-1782)

☐ Significado dos termos / Interpretação energética

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Carga total, energia mecânica total ou carga (H)

$$Z$$

Cota geométrica em relação a um plano horizontal de referência: **energia potencial de posição por unidade de peso**

$$p/\gamma$$

Altura piezométrica: **energia de pressão da unidade de peso de líquido submetido à pressão p**

$$u^2/2g$$

Altura cinética: **energia cinética por unidade de peso do líquido**

$$\frac{p}{\gamma} + Z$$

Cota ou Carga piezométrica

Os termos de energia definidos deste modo apresentam a unidade de altura equivalente (m)

A aplicação da equação da energia **entre dois pontos da linha de corrente** surge na forma:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

ou

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (Z_1 - Z_2) = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

“No escoamento permanente de um fluido ideal entre duas posições 1 e 2 de uma linha de corrente, o aumento da energia cinética por unidade de peso é igual ao trabalho realizado por unidade de peso pelas forças de gravidade e de pressão”

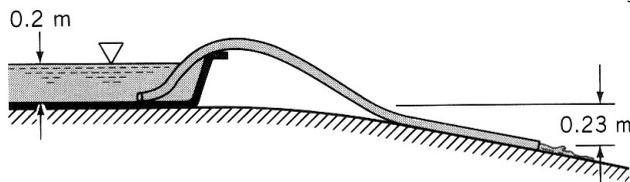
□ Condições de aplicação da equação de Bernoulli

É muito importante que não esquecer as restrições para a aplicação da equação de Bernoulli na forma apresentada. São elas:

- ✓ Os pontos de aplicação situam-se na mesma linha de corrente;
- ✓ Escoamento permanente;
- ✓ Fluido incompressível;
- ✓ Escoamento sem atrito;
- ✓ Aplica-se ao longo de uma linha de corrente;
- ✓ Ausência de realização de trabalho entre pontos de aplicação.

Exemplo: Utilizou-se uma mangueira de plástico com 10 metros de comprimento e 15 milímetros de diâmetro interior para esvaziar uma piscina tal como se representa na figura. Desprezando os efeitos viscosos, determine o caudal de água em escoamento.

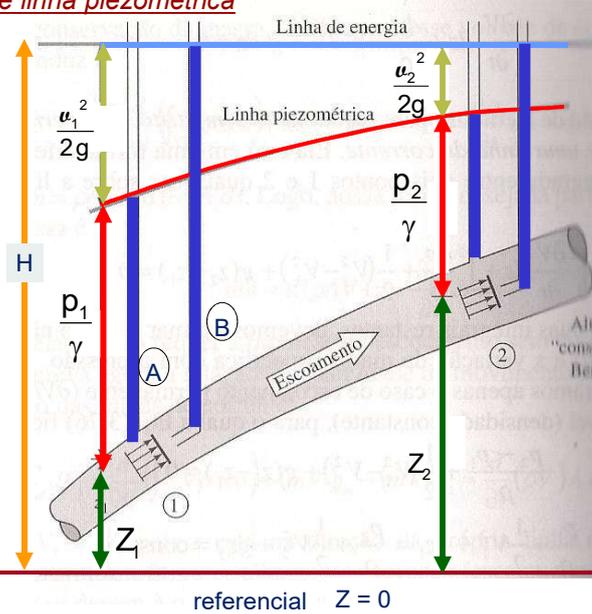
solução: $Q = 5.1 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$



□ Linha de energia e de linha piezométrica

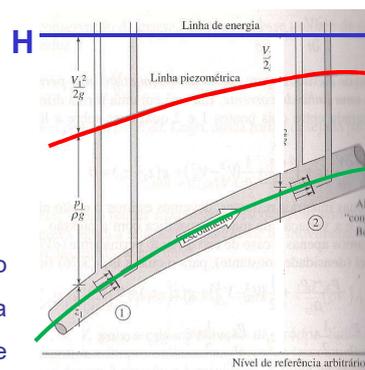
Considere-se uma trajectória da qual se conhecem as cotas geométricas em relação a um plano horizontal de referência

- (A) Piezómetro
- (B) Pitot



A **linha de energia (H)** representa a **carga total do líquido** por unidade de peso ao longo da trajectória

Para líquidos **perfeitos** em escoamento permanente a linha de energia para uma dada trajectória é horizontal, uma vez que a carga é constante ao longo da trajectória (H é constante)

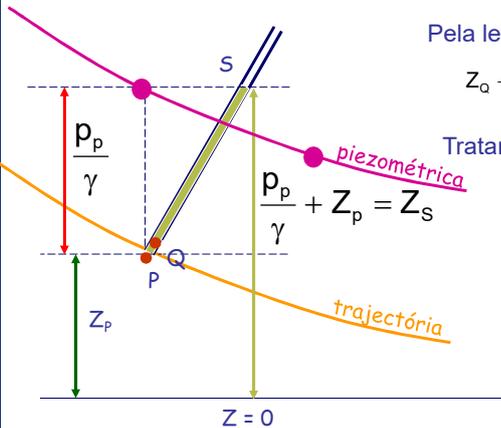


Medição da linha piezométrica – Tubo piezométrico (ou de Prandtl)

P localiza-se na base do tubo piezométrico (fora dele)

S localiza-se na superfície livre

Q localiza-se dentro do piezómetro, próximo de P => $p_P = p_Q$, logo: $Z_Q + \frac{p_Q}{\gamma} = Z_P + \frac{p_P}{\gamma}$



Pela lei hidrostática de pressões

$$Z_Q + \frac{p_Q}{\gamma} = Z_S + \frac{p_S}{\gamma}$$

Tratando-se depressões relativas => $p_S = 0$

$$Z_P + \frac{p_P}{\gamma} = Z_Q + \frac{p_Q}{\gamma} = Z_S$$

$$Z_S = \frac{p_P}{\gamma} + Z_P$$

A distância na vertical entre a base e a superfície livre é a altura piezométrica

A cota atingida pela superfície livre da água num piezómetro, em relação a um referencial é a cota piezométrica na base do tubo

Este ppt não faz parte do programa. Trata-se de informação adicional para que estiver interessado

Variação da cota piezométrica segundo as linhas de corrente

$$F_n = m a_n \Leftrightarrow F_1 - F_2 - P_y = m a_n$$

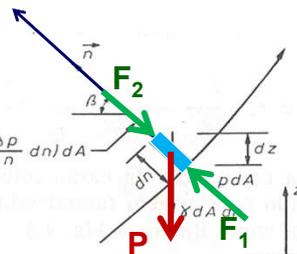
$$p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) dA - \rho g dA dn \sin \beta = \rho dA dn a_n$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} dn dA - \rho g dA dn \sin \beta = \rho dA dn a_n$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} dA dn + \rho g dA dz = -\rho dA dn a_n$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} dn + \gamma dz = -\frac{\gamma}{g} dn a_n \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = -\frac{1}{g} a_n \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = -\frac{1}{g} \frac{u^2}{r}$$

Trajectórias rectilíneas => raio de curvatura infinito



$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = 0$$

A cota piezométrica é constante segundo qualquer linha normal às trajectórias (neste caso coincidentes com as linhas de corrente). Se as trajectórias, para além de rectilíneas, são paralelas, a distribuição de pressões em planos normais às trajectórias é hidrostática ($p = \rho g h$).

□ Aplicações do teorema de Bernoulli

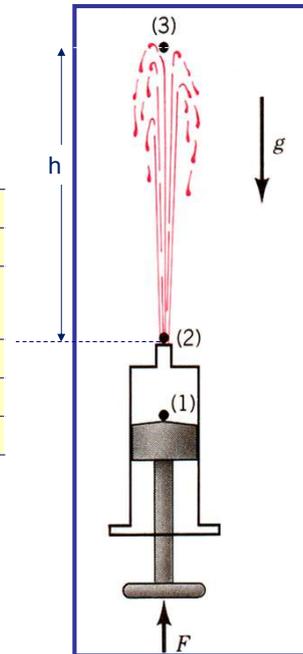
1. Jacto de água para a atmosfera:

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante}$$

Ponto	Componente energética		
	Cinética	Potencial	Pressão
1	$\frac{u^2}{2g}$	z	$\frac{p}{\gamma}$
2	-	-	-
3	-	-	-

$$Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{u_3^2}{2g}$$

$$0 + 0 + \frac{u_2^2}{2g} = h + 0 + 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2gh}$$



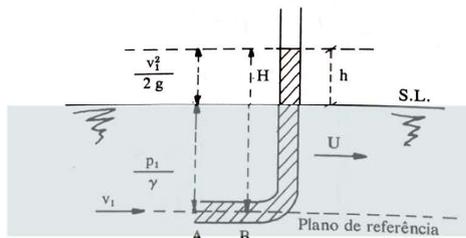
Secção Engº Rural

2. Tubo de Pitot para medição da energia total do fluido

Henry Pitot (1695-1071)

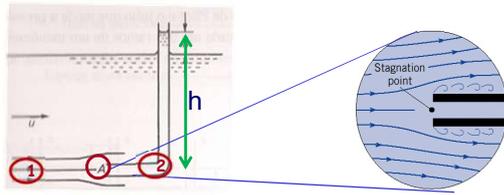
Tubo de Pitot

Serve para determinar a **velocidade** local do fluido em vários pontos do diâmetro da tubagem, com o objectivo do cálculo da **velocidade média** da secção líquida de escoamento



Secção Engº Rural

Tubo de Pitot simples



No ponto de estagnação a velocidade é reduzida a zero.

Qualquer obstáculo fixo colocado numa corrente de fluido dá origem a um ponto de estagnação.

De acordo com o T Bernoulli, $Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = c^{te}$ ao longo da linha de corrente

No p de estagnação $u = 0 \Rightarrow$ a pressão aumenta de $\frac{p}{\gamma}$ para $\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ (pressão de estagnação)

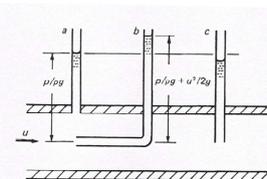
O líquido sobe assim, na parte vertical do tubo até uma altura $\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$

Em superfície livre, é necessário apenas este tubo para a determinação da velocidade de escoamento do fluido.

$\frac{p}{\gamma}$ coincide com a superfície livre \Rightarrow diferença entre as pressões de estagnação e a estática é dada directamente pela distância h.

Tubo de Pitot estático

Para um fluido sob pressão, é necessário medir a pressão estática separadamente, recorrendo a um piezómetro



$$\frac{p}{\gamma} + Z + \frac{u^2}{2g} - \left(\frac{p}{\gamma} + Z \right) = \frac{u^2}{2g}$$

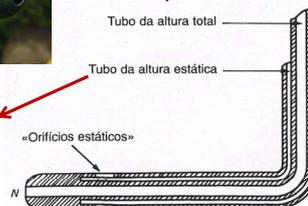
Com a qual determinamos a velocidade do fluido

Nos aparelhos comerciais o tubo que mede a pressão estática e o que mede a pressão de estagnação estão quase sempre combinados num só instrumento, denominado de tubo de *Pitot estático*



$$Z + \frac{p}{\gamma}$$

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$



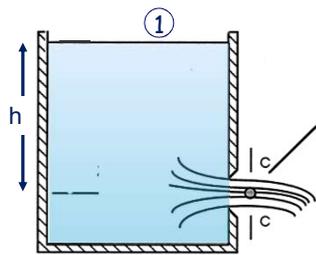


Secção Engº Rural

3. Escoamento através de um orifício (reservatório de grandes dimensões)

Orifício: abertura através da qual se faz um escoamento, sendo a sua **espessura** muito pequena em relação às outras dimensões.

Se o orifício for biselado é mínimo o contacto com o fluido, reduzindo-se ao máximo os efeitos do atrito.



$$H_1 = H_2 \Leftrightarrow Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$h + 0 + 0 = 0 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{u_2^2}{2g}$$

Num reservatório de grandes dimensões o regime pode considerar-se permanente porque a variação da cota da superfície livre só será apreciável para um intervalo de tempo bastante longo. Isto porque a área da superfície livre é muito grande comparativamente com a área do orifício.

Velocidade real de descarga:
(considerando a perda de carga singular)

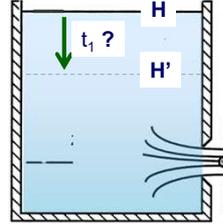
$$u_2 = C \times \sqrt{2gh}$$

C – coeficiente de descarga

Secção Engº Rural

Quando o processo em regime variável evolui muito gradualmente, pode empregar-se a *formulação do regime permanente* para representar o sistema em cada instante, *legitimando a aplicação do teorema de Bernoulli*.

- A equação da continuidade $Q = A_1 \left(-\frac{dh}{dt} \right)_1 = A_2 u_2$ permite relacionar a taxa de descida da superfície livre no depósito, dh/dt , com a velocidade de escoamento à saída do orifício



- Recorrendo à equação de Torricelli para a velocidade de saída, u_2

$$A_1 \left(-\frac{dh}{dt} \right) = A_2 C \sqrt{2gh} \Leftrightarrow dt = -\frac{A_1}{A_2 C \sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

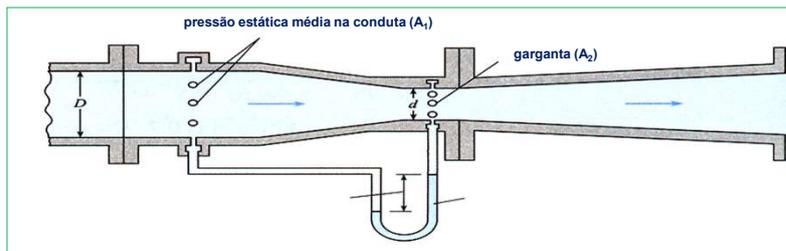
- Integrando a expressão entre o tempo inicial e o instante t_1 , para o qual a superfície livre atinge o nível h' :

$$\int_{t=0}^{t=t_1} dt = -\frac{A_1}{A_2 C \sqrt{2g}} \int_H^{H'} h^{-\frac{1}{2}} dh \Rightarrow t_1 = \frac{2A_1}{A_2 C \sqrt{2g}} \left[h^{\frac{1}{2}} \right]_H^{H'}$$

Tempo necessário (s) para que a superfície livre passe do nível inicial H para o nível final H'

Secção Eng.º Rural

4. Medição directa do caudal no interior de um tubo – Tubo de Venturi:



- TB entre 1 e 2: $Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$

- Equação da continuidade entre 1 e 2:

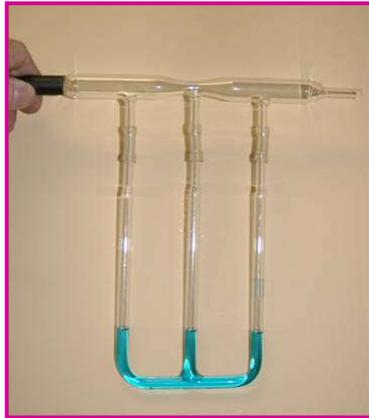
$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{A_1 u_1}{A_2}$$

- Princípio fundamental da hidrostática aplicado ao manómetro

- Determinação do caudal: $Q = A_1 \times u_1$

Secção Eng.º Rural

Tubo de Venturi



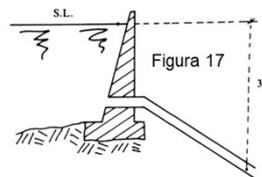
Sem escoamento no tubo



Com escoamento no tubo

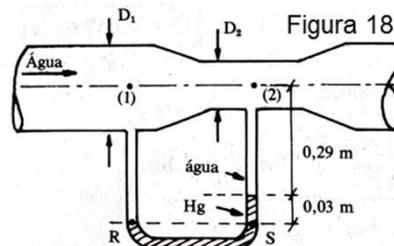
44. Na conduta que parte da barragem representada na Figura, escoo o caudal de 28 L s^{-1} . A pressão no ponto 1 é 29.6 mca . Determine a área e o diâmetro da secção transversal da tubagem desprezando as perdas de energia.

$(A = 0.01 \text{ m}^2; d = 11.3 \text{ cm})$



47. A um tubo de Venturi horizontal liga-se um manómetro de mercúrio. Sabendo que o caudal escoado é 1.34 L s^{-1} , que a velocidade 1 é 1 m s^{-1} e desprezando as perdas por fricção, determine os diâmetros D_1 e D_2 .

$(D_1 = 0.0633 \text{ e } D_2 = 0.037 \text{ m})$



48. Um jacto de água, de reduzida dimensão, obtido a alta pressão e é geralmente utilizado no corte de chapas de aço. Desprezando o efeito da viscosidade, determine o valor da pressão necessária à produção de um jacto de água de 0.10 mm de diâmetro animado de uma velocidade de 700 m s⁻¹. Determine o caudal em escoamento.



solução : $Q = 1.75 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

